Ew. zu dessen Solution haben sollte, kann ich mir nicht vorstellen, und bitte mir zu melden, ob der autor ferner etwas davon bekannt gemacht? In den Amsterdamer französischen Zeitungen vom 5. Aug. 1749 war folgendes avertissement: M. Quin Mackenzie Quin.... a inventé, à l'âge de 8 ans, et il a eu l'honneur de présenter au Roy une méthode par laquelle il multiplie et divise quelque nombre de figures que ce soit, et en vérifie le produit et le quotient en une seule ligne. Il fait cette opération en moins de trois minutes, quand même il s'agiroit de multiplier 20 figures par 20 figures, ou 40 par 20. Ceux qui voudront souscrire pour avoir cette méthode seront tenus de donner d'abord une guinée, et une autre après que cette méthode leur aura été communiquée ou à leurs correspondans. Nach der Zeit habe ich nichts mehr hiervon gehört.

Goldbach.



# LETTRE CXXX.

## Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches arithmétiques. Résolution de chaque nombre en quatre quarrés. Série dont les termes sont les sommes des diviseurs des nombres naturels.

Berlin d. 9. Juni 1750.

Ew. theorema

$$\beta^2+\gamma^2+(3\delta-\beta-\gamma)^2=(2\delta-\beta)^2+(2\delta-\gamma)^2+(\delta-\beta-\gamma)^2$$

hat mir Anlass gegeben folgende theoremata zu finden, unter welchen dieses das erste ist

I. Si $a+b+c=3m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2$$

II. Si $a+b+2c=3m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2$$

III. Si $a+2b+2c=9m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2$$

IV. Si $a+b+3c=11m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(6m-c)^2$$

V. Si $a+2b+3c=7m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(2m-b)^2+(3m-c)^2$$
VI. Si $2a+2b+3c=17m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(4m-a)^2+(4m-b)^2+(6m-c)^2$$
VII. Si $a+3b+3c=19m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(6m-b)^2+(6m-c)^2$$
VIII. Si $2a+3b+3c=11m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(3m-b)^2+(3m-c)^2$$
wo zu merken, dass die radices $a$, $b$, $c$ sowohl negative als affirmative genommen werden können.

Solche theoremata können auch für vier quadrata gefunden werden als

I. Si $a+b+c+d=2m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2$$
II. Si $a+b+c+2d=7m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(4m-d)^2$$
III. Si $a+b+2c+2d=5m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2$$
IV. Si $a+2b+2c+2d=13m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2+(4m-d)^2$$

Wenn dahero $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2$ zu $1^2+\eta^2+\vartheta^2+4\varkappa^2$ reducirt werden soll, wo alle Buchstaben numeros impares bedeuten, sowohl affirmativos, als negativos, so würde nach dem IIten theoremate kommen:

1. Si $3+\beta+\gamma+4\varepsilon=7m$, erit $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(2m-3)^2+(2m-\beta)^2+(2m-\gamma)^2+4(2m-\varepsilon)^2$, wo auch $m$ ein numerus impar; also müsste entweder $2m-3=1$, oder $2m-\beta=1$, oder $2m-\gamma=1$. Solches geschiehet nur in folgenden Fällen:



1. wenn $m=1$, und also $\beta+\gamma+4\varepsilon=4$,
2. wenn $m=2$, und also $\beta+\gamma+4\varepsilon=11$, welches unmöglich,
3. wenn $\beta=2m\pm1$, und $\gamma+4\varepsilon=5m-3\mp1$.

2. Si $3+\beta+2\gamma+2\varepsilon=7m$, erit $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(2m-3)^2+(2m-\beta)^2+(4m-\gamma)^2+4(m-\varepsilon)^2$.
Also müsste seyn entweder $2m-3=\pm1$, oder $2m-\beta=\pm1$, oder $4m-\gamma=\pm1$, wo $m$ eine gerade Zahl ist. Also geschiehet dieses in folgenden Fällen:

1. wenn $m=2$, und also $\beta+2\gamma+2\varepsilon=11$,
2. wenn $\beta=2m\pm1$, und $2\gamma+2\varepsilon=5m-3\mp1$,
3. wenn $\gamma=4m\pm1$, und $\beta+2\varepsilon=-m-3\mp2$.

3. Si $6+\beta+\gamma+2\varepsilon=7m$, erit $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(4m-3)^2+(2m-\beta)^2+(2m-\gamma)^2+4(m-\varepsilon)^2$,
wo $m$ wieder ein numerus par ist.

Jedoch zweifle ich, ob durch dieses 2te theorema allein immer ein Quadrat $=1$ gefunden werden könne.

Man kann auch solche theoremata für fünf quadrata geben, als:

I. Si $a+b+c+d+e=5m$, erit $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2+(2m-e)^2$.
II. Si $a+b+c+d+2e=4m$, erit $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2+(2m-e)^2$.
etc.

Wenn man nun beweisen könnte, dass eines von diesen letztern quadratis könnte ad nihilum gebracht werden, so hätte man auch was man verlanget. Solches gehet also an, wenn entweder $a+b+c+d=0$, oder $3a=b+c+d+2e$.

Ew. IItes theorema von dem nexu inter $2m-1=4\square$ et $2m+1=4\square$, concessa resolutione numeri $8n+3$

in tria quadrata, verstehe ich also: Sit $n = m - 1$, atque $8n + 3 = 8m - 5 = aa + bb + cc$, wo $a$, $b$, $c$ numeri impares sind; erit $8m - 4 = 1 + aa + bb + cc$, unde

$$4m - 2 = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

wo zwey radices pares sind, und zwey impares, folglich diese Form $4m - 2 = 4pp + 4qq + rr + ss$, also

$$2m - 1 = (p+q)^2 + (p-q)^2 + \left(\frac{r+s}{2}\right)^2 + \left(\frac{r-s}{2}\right)^2.$$

Weil $a$, $b$, $c$ sowohl negative als affirmative genommen werden können, sit $2p = \frac{a+1}{2}$, $2q = \frac{b+c}{2}$, erit $2m - 1 = \left(\frac{a+b+c+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b-c+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c-1}{4}\right)^2$. Hernach ist $8m + 4 = 9 + aa + bb + cc$; also $4m + 2 = \left(\frac{a+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$, wo $\frac{a-3}{2}$ et $\frac{b+c}{2}$ gerade, $\frac{a+3}{2}$, $\frac{b-c}{2}$ ungerade Zahlen seyn werden. Also wird $2m + 1 = \left(\frac{a+b+c-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b-c-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c+3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c+3}{4}\right)^2$. Hieraus folget, dass wenn

$$2m - 1 = pp + qq + rr + ss,$$

alsdann immer seyn werde

$$2m + 1 = (p+1)^2 + (q+1)^2 + (r-1)^2 + (s-1)^2,$$

nehmlich zwey von den radicibus quadratorum ipsius $2m+1$, werden um 1 grösser seyn, als zwey von den radicibus quadratorum ipsius $2m - 1$, und zwey um 1 kleiner. Woraus dieses schöne theorema entspringet:

*Theorema.* Wenn $2m - 1 = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta$, et

$$2m + 1 = aa + bb + cc + dd,$$

so werden von den Wurzeln $a, b, c, d$ zwey um 1 grösser, die andern zwey aber um 1 kleiner seyn, als die Wurzeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Also ist:



| | |
|---|---|
| $1 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2$<br>$3 = (0+1)^2 + (0+1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2$ | $3 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$<br>$5 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2$ |
| $5 = 0^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2$<br>$7 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2-1)^2 + (0-1)^2$ | $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$<br>$+ \quad + \quad - \quad -$<br>$9 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2$ |
| $9 = 0^2 + (-1)^2 + 2^2 + 2^2$<br>$- \quad + \quad + \quad -$<br>$11 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$ | |

Zu merken ist, dass $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sowohl affirmative als negative genommen werden können. Also kann das theorema also ausgesprochen werden: Singulae radicum $a$, $b$, $c$, $d$, semper unitate discrepabunt a singulis litterarum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

Folgendes theorema scheint also merkwürdig zu seyn: Si $2m - 1 = pp + qq + rr + ss$, erit semper

$$2m + 1 = (p \pm 1)^2 + (q \pm 1)^2 + (r \pm 1)^2 + (s \pm 1)^2$$

dummodo signorum ambiguitas rite observetur *)

*Coroll.* Also ist allzeit $\pm 2p \pm 2q \pm 2r \pm 2s + 4 = 2$, oder $\pm p \pm q \pm r \pm s + 1 = 0$; das ist: Eine jegliche ungerade Zahl $2m - 1$ kann allzeit in vier solche quadrata

$$pp + qq + rr + ss$$

resolvirt werden, ut sit $\pm p \pm q \pm r \pm s = 1$. Denn es ist zu merken, dass man auch oft solche vier quadrata findet, da diese Eigenschaft nicht Statt findet als $27 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2$, oder $39 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 6^2$. Doch aber ist auch

$$27 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2, \text{ ubi } +1 - 1 - 3 + 4 = 1.$$

Also ist, wenn diese signa $+ - - +$ verkehrt unter jene quadrata geschrieben werden

*) Nicht eine jegliche Resolution von $2m - 1$ hat diese Eigenschaft, sondern es gibt allzeit eine, so diese Eigenschaft hat.

$27 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2$

$- \quad + \quad + \quad -$

$29 = 0^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2$, ubi $+0 + 2 - 4 + 3 = 1$

$- \quad - \quad + \quad -$

$31 = 1^2 + 1^2 + 5^2 + 2^2$, ubi $-1 - 1 + 5 - 2 = 1$

$+ \quad + \quad - \quad +$

$33 = 2^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2$, ubi $+2 - 2 + 4 - 3 = 1$

$- \quad + \quad - \quad +$

$35 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2$, ubi $-1 + 3 + 3 - 4 = 1$

$+ \quad - \quad - \quad +$

$37 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 5^2$, ubi $+2 + 2 + 2 - 5 = 1$

$- \quad - \quad - \quad +$

$39 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 6^2$.

Von hier aus lässt sich nicht weiter gehen; dahero muss man eine andere Resolution von 39 nehmen, welches durch die IIIte der obigen Formuln geschehen kann, da dann wird $a = 1, b = -1, c = -1, d = 6$; $a + b + 2c + 2d = 10 = 5m$, also $m = 2$ und also

$39 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 2^2$, ubi $1 + 3 - 5 + 2 = 1$ oder

$1 - 3 + 5 - 2 = 1$, also

$- \quad - \quad + \quad -$

$- \quad + \quad - \quad +$

$$\left.\begin{aligned} 41 &= 0^2 + 2^2 + 6^2 + 1^2 \\ &= 0^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2 \end{aligned}\right\}$$ Hieraus muss wieder eine Resolution gesucht werden. Nach dem andern theoremate wird $a = -1$, $b = 2$, $c = 6$, $d = 0$; $a + b + c + 2d = 7 = 7m$, also $m = 1$, und dahero $41 = 3^2 + 0^2 + 4^2 + 4^2$, welche wieder nichts hilft. Hieraus aber wird durch das andere theorema $a = 0$, $b = 4$, $c = 4$, $d = 3$, $m = 2$*) und also

*) Hierzu ist es aber leichter die theoremata von drey quadratis, sonderlich das erste zu gebrauchen.



$41 = 4^2 + 0^2 + 0^2 + 5^2$, ubi $-4 + 0 + 0 + 5 = 1$

$+ \quad - \quad - \quad -$

$43 = 5^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2$, ubi $+5 + 1 - 1 - 4 = 1$ oder

$-5 + 1 + 1 + 4 = 1$

$- \quad - \quad + \quad +$

$+ \quad - \quad - \quad -$

$45 = 4^2 + 0^2 + 2^2 + 5^2$, ubi $+4 + 0 + 2 - 5 = 1$

$= 6^2 + 0^2 + 0^2 + 3^2$.

Ungeacht ich aber in dieser Materie so weit gekommen, dass ich dieses theorema demonstriren kann: omnem numerum esse summam quatuor quadratorum vel pauciorum, so fehlet mir doch noch zu zeigen, dass diese vier oder wenigere quadrata allzeit in integris angegeben werden können. Und dahero bin ich noch weit von des Fermat's Erfindung entfernt. Zu dieser glaube ich auch nicht dass man gelangen könne, ohne bey den numeris trigonalibus anzufangen. Man müsste also trachten zu beweisen, dass omnis numerus integer summae trium vel pauciorum numerorum trigonalium gleich sey. Hierzu aber kann eine algebraische Evolution keineswegs behülflich seyn, weil es nicht einmal wahr ist, dass $n = \frac{xx + x}{2} + \frac{yy + y}{2} + \frac{zz + z}{2}$ generaliter, sondern nur in den Fällen, da $n$ ein numerus integer affirmativus; da hingegen diese Formul $n = xx + yy + zz + vv$ wahr ist, wenn $n$ auch ein numerus fractus ist, nur nicht negativus. Ich habe aber hierauf seit langer Zeit nicht weiter gedacht, und also auch nichts weiter gefunden.

Vor einiger Zeit habe ich Ew. eine Entdeckung über die summas divisorum numerorum naturalium zu überschreiben die Ehre gehabt: *)

*) Lettre CIII du 1 Avril 1747.

Numeri: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 etc.
Summae divisor.: 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28, 14, 24, 24 etc.
und bemerket, dass diese series summae divisorum recurrens sey, also dass wenn $\int n$ die summam divisorum numeri $n$ andeutet, allzeit ist

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \text{etc.}$$

Diese Entdeckung schien mir um so viel merkwürdiger, da der Beweis davon nicht vollständig war, sondern sich auf dieses theorema gründete, dass

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\text{ etc.} = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.},$$

welches ich nur per inductionem gefunden hatte und auf keinerley Weise beweisen konnte. Es schien mir auch merkwürdig, dass die exponentes alternatim sumti 1, 5, 12, 22, 35, etc. die numeri pentagonales sind, und die übrigen 2, 7, 15, 26, 40, etc. die seriem pentagonalium retro continuatam vorstellen, also dass die obige series auch solchergestalt dargestellt werden kann

$$\text{etc.} - x^{40} + x^{26} - x^{15} + x^7 - x^2 + x^0 - x^1 + x^5 - x^{12} + x^{22} - x^{35} + \text{etc.},$$

wo die differentiae exponentium eine progressionem arithmeticam ausmachen.

Seit der Zeit aber habe ich auch die Demonstration dieses theorematis gefunden, welche sich auf dieses lemma gründet:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)\text{ etc.} = 1-\alpha-\beta(1-\alpha)-\gamma(1-\alpha)(1-\beta)-\delta(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)-\text{etc.}$$

dessen Demonstration sogleich in die Augen fällt.

Also ist nach diesem lemmate



$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\text{ etc.} = s = 1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - \text{etc.}$$

Ponatur $s = 1 - x - Axx$, erit

$$A = 1 - x + x(1-x)(1-x^2) + x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \text{etc.}$$

Evolvatur ubique factor $1-x$, erit

$$\begin{aligned} A = 1 - x \qquad & - x^2(1-xx) \qquad - x^3(1-xx)(1-x^3) - \text{etc.} \\ & + x(1-xx) + x^2(1-xx)(1-x^3) + x^3(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) + \text{etc.} \end{aligned}$$

hincque fiet

$$A = 1 - x^3 \qquad - x^5(1-xx) \qquad - x^7(1-xx)(1-x^3) - \text{etc.}$$

Sit $A = 1 - x^3 - Bx^5$, erit

$$B = 1 - xx + x^2(1-xx)(1-x^3) + x^4(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) + \text{etc.}$$

Evolvatur factor $1 - xx$:

$$\begin{aligned} B = 1 - xx \qquad & - x^4(1-x^3) \qquad - x^6(1-x^3)(1-x^4) - \text{etc.} \\ & + xx(1-x^3) + x^4(1-x^3)(1-x^4) + x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \text{etc.} \end{aligned}$$

hincque fiet

$$B = 1 - x^5 \qquad - x^8(1-x^3) \qquad - x^{11}(1-x^3)(1-x^4) - \text{etc.}$$

Sit $B = 1 - x^5 - Cx^8$, erit

$$C = 1 - x^3 + x^3(1-x^3)(1-x^4) + x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \text{etc.}$$

Evolvatur factor $1 - x^3$:

$$\begin{aligned} C = 1 - x^3 \qquad & - x^6(1-x^4) \qquad - x^9(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc.} \\ & + x^3(1-x^4) + x^6(1-x^4)(1-x^5) + x^9(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) + \text{etc.} \end{aligned}$$

ergo

$$C = 1 - x^7 \qquad - x^{11}(1-x^4) \qquad - x^{15}(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc.}$$

Sit $C = 1 - x^7 - Dx^{11}$ etc.

Wenn man nun auf gleiche Art fortgehet, so wird

$$D = 1 - x^9 - Ex^{14}, \quad E = 1 - x^{11} - Fx^{17} \text{ etc.}$$

Also wird seyn:

$$\left.\begin{array}{l} s = 1 - x - Ax^2 \\ A = 1 - x^3 - Bx^5 \\ B = 1 - x^5 - Cx^8 \\ C = 1 - x^7 - Dx^{11} \\ D = 1 - x^9 - Ex^{14} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} s = 1 - x - Ax^2 \\ Ax^2 = x^2\,(1 - x^3) - Bx^7 \\ Bx^7 = x^7\,(1 - x^5) - Cx^{15} \\ Cx^{15} = x^{15}\,(1 - x^7) - Dx^{26} \\ Dx^{26} = x^{26}\,(1 - x^9) - Ex^{40} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

woraus denn ganz ungezweifelt folget

$$s = 1 - x - x^2\,(1 - x^3) + x^7\,(1 - x^5) - x^{15}\,(1 - x^7) + x^{26}\,(1 - x^9) - \text{etc.}$$

oder

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{etc.}$$

Euler.

# LETTRE CXXXI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Théorèmes relatifs à la résolution des nombres en trois et quatre quarrés.

St. Petersburg d. 18. Juli 1750.

Die Demonstration von den theorematibus, die summas trium et quatuor quadratorum betreffend, welche Ew. in Dero Schreiben aufführen, habe ich leicht eingesehen, weil generaliter wahr ist, dass posita $z = \frac{2(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h)}{ee + ff + gg + hh}$, die vier gegebenen quadrata $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta$ gleich sind $(ez - \alpha)^2 + (fz - \beta)^2 + (gz - \gamma)^2 + (hz - \delta)^2$, allwo die quantitates $e, f, g, h$ pro lubitu genommen werden können, wenn auch über dieses, die letztern vier quantitates so beschaffen sind, dass die summa quatuor radicum

$$(e + f + g + h)\,z - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0,$$

so können die vier quadrata allezeit in drey quadrata verwandelt werden.